فصل اول

دنباله‌ها

در این فصل مفهوم دنباله‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.دنباله‌ها به نوعی ما را برای درک حد توابع آماده می‌کنند و نیز به کمک دنباله‌هاست که سری‌ها را تعریف می‌کنیم. سری‌ها برای تعریف انتگرال معین می‌توانند مفید باشند و با افزایش دانسته‌های ما در حساب دیفرانسیل و انتگرال، کاربردهای فراوانی از دنباله‌ها و سری‌ها را خواهیم شناخت.

۱.۱ دنباله‌ها

تصاعدهای حسابی، مثالهایی از دنباله‌های عددی هستند. مثلاً، تصاعد حسابی با جملهٔ اول $a_1 = 1$ و قدر نسبت $d = 1$ یک دنبالهٔ عددی نامتناهی به شکل $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ است. به طریق مشابه، اگر تصاعد هندسی با جملهٔ اول $a_1 = 1$ و قدر نسبت $q = \frac{1}{2}$ را درنظر بگیریم، یعنی تصاعد هندسی به شکل $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ نیز یک دنبالهٔ نامتناهی به دست می آوریم. اینک تعریف کلی.

تعریف: یک دنبالهٔ نامتناهی تابعی است مانند a که دامنهٔ (حوزه تعریف) آن مجموعهٔ اعداد طبیعی و برد (حوزه مقادیر) آن زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی R است. پس می‌توان نوشت :

$$a : N \to R .$$

مقدار تابع a در عدد طبیعی n ، یعنی $a(n)$، را با a_n نمایش می‌دهیم و آن را **جملهٔ عمومی** دنباله می‌نامیم. اکنون توضیح می‌دهیم که چگونه دنبالهٔ a را به صورت اختصاری با استفاده از جملهٔ عمومی با $\{a_n\}$ نمایش می‌دهند. بنابر تعریف تابع در نظریهٔ مجموعه ها می‌توانیم بنویسیم

$$a = \{ (n, a(n)) \mid n \in N \}$$

و گفتیم که $a(n)$ را با a_n نمایش می‌دهیم، پس

$$a = \{ (n, a_n) \mid n \in N \} = \{ (1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots \}$$

از آنجایی که دامنهٔ دنباله‌ها مجموعهٔ اعداد طبیعی N است، معمولاً در نمایش دنباله از نوشتن عضوهای دامنه خودداری می‌کنند. لذا می‌نویسیم

$$a = \{a_n \mid n \in N\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

و به دلیل آنکه نوشتن بدین صورت نیز جای زیادی را می‌گیرد، می‌نویسیم $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و یا $a = \{a_n\}$.

با توجه به توضیح بالا است که در سراسر کتاب برای دنبالهٔ a از علامت اختصاری $\{a_n\}$ استفاده می‌کنیم.

مثال۱: اگر f یک دنباله با جملهٔ عمومی $f_n=\dfrac{n}{2n+1}$ باشد، آنگاه داریم

$$f_1=\frac{1}{3},\ f(2)=\frac{2}{5},\ f(3)=\frac{3}{7},\ f(4)=\frac{4}{9},\dots$$

که می‌نویسیم $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{7},\dots,\dfrac{n}{2n+1},\dots$.

ما بایستی بین جملات یک دنباله و خود دنبالهٔ تمیزقایل شویم . به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲: جملات دنبالهٔ $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ وارون‌های اعداد طبیعی هستند.

$$1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\dots;\frac{1}{n};\dots \qquad (1)$$

دنباله‌ای که برای آن $f_n=\begin{cases}1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\\ \dfrac{2}{n+2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\end{cases}$

دارای جملات $(2)\quad 1,\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{3},1,\dfrac{1}{4},\dots$ است. ملاحظه می‌کنید که جملات دنباله‌های (1) و (2) مانند هم هستند، با وجود این خود دنباله‌ها متفاوتند. نمودار دنباله‌های (1) و (2) در زیر نشان داده شده است.

شکل ۱ . ۱

تبصره : معمولاً برای نمایش دنباله‌ها کار را ساده‌تر می‌کنند و جملات دنباله را روی محور افقی نشان می‌دهند. دنباله، $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$بدین طریق نمایش داده شده است.

شکل ۱ . ۲

و به طور کلی، اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد، می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد.

شکل ۱ . ۳

۱ . ۲ همگرایی

در دنباله $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ توجه می‌کنیم که جملات متوالی دنباله به $\frac{1}{2}$ نزدیکتر و نزدیکتر می‌شوند، هر چند که هیچ جمله‌ای از دنباله مساوی با $\frac{1}{2}$ نیست. می‌بینیم که جملات به قدر دلخواه به $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شوند، به شرط آنکه تعداد جملات را به قدر کافی بزرگ اختیار کنیم. به بیان دیگر، می‌توانیم $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|$ را کمتر از هر $\varepsilon>0$ دلخواهی بسازیم، هرگاه n را به قدر کافی بزرگ بگیریم، به این دلیل است که می‌گوییم حد دنباله $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

تعریف: دنباله $\{a_n\}$ و عدد حقیقی L را در نظر می‌گیریم: گوییم دنباله $\{a_n\}$ دارای حد L است، و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$، در صورتی که برای هر $\varepsilon>0$ عددی طبیعی مانند M وجود داشته باشد، به طوری که اگر $n\geq M$، آنگاه $|a_n - L|<\varepsilon$. این مطلب را به صورت منطقی چنین می‌نویسیم:

$$\forall \varepsilon>0 \exists M\in N \ni n\geq M \Rightarrow |a_n - L|<\varepsilon$$

(در اینجا $N=\{1,2,3,\ldots\}$ مجموعه اعداد طبیعی است)

در تعریف بالا M در حالت کلی بستگی به ε دارد $(M = M(\varepsilon))$. اگر حد دنباله عددی مانند L باشد، می‌گوییم **دنباله همگرا (یا متقارب)** است و در غیر این صورت، آن را **واگرا (یا متباعد)** می‌نامند.

مثال ۳ : با استفاده از تعریف ثابت کنید که حد دنباله $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ برابر با $\frac{1}{2}$ است .

حل: بایستی نشان دهیم که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in N \ni n \geq M \Rightarrow \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

اما می‌توان نوشت

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-1}{4n+2}\right| = \frac{1}{4n+2}$$

بنابراین، بایستی عددی مانند $M > 0$ پیدا کنیم، به طوری که

اگر $n \geq M$، آنگاه $\frac{1}{4n+2} < \varepsilon$

اما $\frac{1}{4n+2} < \varepsilon$ معادل است با $2n+1 > \frac{1}{2\varepsilon}$، که این خود معادل است با $n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$. بنابراین، اگر n عددی طبیعی باشد به طوری که $n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$، آنگاه $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. پس کافی است M را عددی طبیعی بگیریم، به طوری که $M \geq \left[\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right] + 1$، و دیده می‌شود که $n \geq M \Rightarrow \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. به ویژه، اگر $\varepsilon = \frac{1}{8}$ اختیار شود، آنگاه $M = \left[\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right] + 1 = \left[\frac{3}{2}\right] + 1 = 2$.

لذا

$$n > 2 \Rightarrow \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{8}$$

به عنوان مثال، اگر $n = 4$ آنگاه

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4}{9} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{18} < \frac{1}{8}$$

توجه: همانطور که می‌دانید [ ] علامت تابع جزء صحیح است.

مثال ۴: نشان دهید که حد دنباله، $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ برابر با 0 است.

حل: توجه کنید که جمله عمومی دنباله $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ است، و $(-1)^{n+1}$ مساوی $+1$ است، هرگاه n فرد باشد و مساوی -1 است، هرگاه n زوج باشد. بنابراین، جملات دنباله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots,\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ldots$$

در شکل پایین نقاط متناظر به جملات متوالی این دنباله روی محور مشخص گردیده‌اند و

$$a_1=1,a_2=\frac{-1}{2},a_3=\frac{1}{3},a_4=\frac{-1}{4},a_5=\frac{1}{5},a_6=\frac{-1}{6},a_7=\frac{1}{7},\ldots$$

حد این دنباله برابر 0 است و جملات اطراف 0 در نوسان هستند. اینک اثبات حد:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists M\in N\ni n\geq M\Rightarrow\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon$$

اما $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\dfrac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. اکنون اگر $M=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ اختیار شود، آنگاه

$$n\geq M\Rightarrow\frac{1}{n}<\frac{1}{M}\Rightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon$$

شکل ۱ . ۴

مثال ۵: ثابت کنید اگر $|r|<1$، آنگاه دنباله $\{r^n\}$ همگرا بوده و حد آن برابر با 0 است.

حل: اگر $r=0$ آنگاه دنباله به صورت $\{0\}$ است و داریم $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$.

پس فرض می‌کنیم $0<|r|<1$ و ثابت می‌کنیم

$$\forall\varepsilon>\exists M\in N\ni n\geq M\Rightarrow|r|^n<\varepsilon$$

اکنون اگر از لگاریتم در مبنای 10 استفاده کنیم، داریم

$$|r|^n<\varepsilon\Leftrightarrow\log|r|^n<\log\varepsilon\Leftrightarrow n\log|r<\log\varepsilon|$$

چون $0<|r|<1$، داریم $\log|r|<0$ و بنابراین

$$n\log|r|<\log\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{\log\varepsilon}{\log|r|}$$

قرار می‌دهیم $M \geq \left[\dfrac{\log \varepsilon}{\log|r|}\right]+1$ و بنابراین

$$n \geq M \Rightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log|r|} \Rightarrow n\log|r| < \log \varepsilon \Rightarrow \log|r|^{n} < \log \varepsilon \Rightarrow |r|^{n} < \varepsilon$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n}=0$، یعنی $\{r^{n}\}$ به عدد 0 همگراست.

تبصره: فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ به عدد L همگرا باشد، یعنی $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ ، پس طبق تعریف داریم

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in N \ni n > M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

اما داریم

$$|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

و این نشان می‌دهد که جملات دنباله $\{a_n\}$ از مرتبه M به بعد، همگی در داخل همسایگی متقارن به مرکز L و شعاع ε قرار دارند.

شکل ۱ . ۵

دیدیم که دنباله $\{a_n\}$ به عدد L همگرا است، هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in N \ni n > M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

در غیر این صورت می‌گوییم که دنباله $\{a_n\}$ واگراست. بایستی در اینجا توجه کرد که این واگرا بودن به معنی آن است که یا $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ و یا آنکه جملات دنباله با افزایش n نه به سمت بینهایت میل می‌کنند و نه به سمت عددی معین. برای حالت $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ ، به عنوان مثال، می‌توان از تعریف زیر استفاده نمود.

تعریف: گوییم دنباله $\{a_n\}$، وقتی n به بینهایت میل کند، به سمت بینهایت میل می‌کند، در صورتی که برای هر عدد حقیقی $M>0$ عددی طبیعی مانند $K=K(M)$ وجود داشته باشد به طوری که

اگر $n \geq K$ آنگاه $|a_n| > M$

یا به زبان منطق

$$\forall M>0\ \exists K\in N \ni n\geq K \Rightarrow |a_n|>M$$

این مطلب را بدین صورت هم می‌نویسند

$a_n \to \infty$ هرگاه $n\to +\infty$

مثال ۶: نشان دهید که دنباله $\{a_n\}=\{n!\}$ واگراست و در حقیقت $\lim_{n\to+\infty} n!=\infty$.

حل: در اینجا جمله عمومی $a_n=n!$ بوده و می‌دانیم که

$$\begin{cases} n!=1\times 2\times\ldots\times n & (n\geq 1) \\ 0!=1 & \text{(بنابر قرارداد)} \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که

$$\forall M>0\ \exists K\in N \ni n\geq K \Rightarrow |n!|>M$$

چون $|n!|=n!>n$، پس اگر $K=[M]+1$ اختیار کنیم، آنگاه $n\geq K \Rightarrow n>M$.

پس برای هر $n>K$ داریم $|n!|=n!>n>K=[M]+1>M$.

و بنابراین $\lim_{n\to+\infty} n!=\infty$.

مثال ۷: همگرایی دنباله $\{(-1)^n+1\}$ را بررسی کنید.

حل: جمله عمومی دنباله $a_n=(-1)^n+1$ است و دیده می‌شود که

$$a_n=\begin{cases} 0 & \text{فرد } n, \\ 2 & \text{زوج } n, \end{cases}$$

پس جملات دنباله به صورت $0,2,0,2,0,2,\ldots$ هستند. به نظر می‌رسد که دنباله واگراست. برای اثبات این مطلب از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم (فرض خلف) که دنباله همگرا باشد و نشان می‌دهیم که این فرض منجر به تناقض می‌شود.

اگر دنباله دارای حد L باشد، یعنی $\lim_{n\to+\infty} a_n=L$ آنگاه بنا بر تعریف

$$\forall \varepsilon>0\ \exists M\in N \ni n\geq M \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$

به ویژه، اگر $\varepsilon=\frac{1}{2}$ اختیار شود آنگاه عددی طبیعی مانند M وجود دارد به طوری که اگر $n\geq M$ آنگاه $|a_n-L|<\frac{1}{2}$ یا، به عبارت معادل، $-\frac{1}{2}<a_n-L<\frac{1}{2}$. حال فرض کنیم $n_1,n_2\geq M$ بوده، n_1 فرد و n_2 زوج باشد. پس با توجه به تعریف a_n

$$-\frac{1}{2}<a_{n_1}-L<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<-L<\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2}<a_{n_2}-L<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<2-L<\frac{1}{2}$$

اما اگر $-L > -\frac{1}{2}$، آنگاه: $2-L > \frac{3}{2}$ و بنابراین $2-L$ نمی‌تواند کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد.
پس یک تناقض بدست می‌آوریم که نتیجه می‌دهد فرض خلف باطل است و بنابراین دنباله واگراست.

قضیه ۱(یکتایی حد): حد دنباله $\{a_n\}$، در صورت وجود، منحصر به فرد (یکتا) است.

اثبات: فرض کنیم

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L_1 \quad (1) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = L_2 \quad (2)$$

بایستی نشان دهیم که $L_1 = L_2$. قضیه را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $L_1 \neq L_2$، پس $|L_1 - L_2| > 0$.

بنابر (1) $\quad \forall \varepsilon_1 > 0 \exists M_1 \in N \ni n \geq M_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \varepsilon_1$

بنابر (2) $\quad \forall \varepsilon_2 > 0 \exists M_2 \in N \ni n \geq M_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \varepsilon_2$

حال اگر $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ اختیار کنیم، داریم

$$\exists M_1 \,\varepsilon\, N \ni n \geq M_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$$
$$\exists M_2 \,\varepsilon\, N \ni n \geq M_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$$

اکنون برای استفاده از هر دو نامساوی طرف‌های راست در بالا $M = max\{M_1, M_2\}$ گرفته و فرض می‌کنیم که $n \geq M$. پس در عین حال

$$|a_n - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{2} \quad \text{و} \quad |a_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$$

می‌توان نوشت

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2} + \frac{|L_1 - L_2|}{2} = |L_1 - L_2|$$

یعنی بدست آوردیم که $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$. با این تناقض دیده می‌شود که فرض خلف باطل است.
پس $L_1 = L_2$ و قضیه ثابت شده است.

۱ . ۳ اعمال اصلی روی دنباله‌ها

در قسمت قبل شاهد تعریف دنباله و تحقیق در همگرایی آن با استفاده از تعریف بودیم و همگرایی چند مثال را به این روش بررسی کردیم. اکنون به وسیله اعمال بردنباله ها از روی دنباله‌های

مفروض، دنباله‌های جدیدی می‌سازیم و سپس قضایایی در این مورد بیان و بعضی از آنها را ثابت می‌کنیم، بدین ترتیب، توانایی ما در محاسبه حد دنباله ها بیشتر خواهد شد.

اینک فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌های مفروضی باشند. در این صورت حاصلجمع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت این دو دنباله به ترتیب عبارت هستند از دنباله‌های:

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\},\quad \{a_n.b_n\},\quad \{a_n-b_n\},\quad \{a_n+b_n\}\qquad (*)$$

البته برای ساختن دنباله خارج قسمت بایستی $b_n\neq 0$. به عنوان مثال اگر $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$ و $\{b_n\}=\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$، آنگاه

$$\{a_n+b_n\}=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2+1}\right\},$$

$$\{a_n-b_n\}=\left\{(-1)^n-\frac{1}{n^2+1}\right\},$$

$$\{a_n.b_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right\},\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}=\left\{(-1)^n\left(n^2+1\right)\right\}$$

قضایای زیر به ما امکان می‌دهد که با استفاده از همگرایی دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به بررسی همگرایی دنباله‌های (*) بپردازیم.

قضیه ۲: اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L_1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=L_2$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=L_1+L_2$.

اثبات: بایستی نشان دهیم که

$$\forall\varepsilon>0\exists M\in N\ni n\geq M\Rightarrow\left|(a_n+b_n)-(L_1+L_2)\right|<\varepsilon$$

چون $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L_1$ پس

$$\forall\varepsilon_1>0\exists M_1\in N\ni n\geq M_1\Rightarrow|a_n-L_1|<\varepsilon_1$$

و چون $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=L_2$ پس

$$\forall\varepsilon_2>0\exists M_2\in N\ni n\geq M_2\Rightarrow|b_n-L_2|<\varepsilon_2$$

اکنون فرض کنیم $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}$ و $M=\max\{M_1,M_2\}$. بنابراین، اگر $n\geq M$، آنگاه در عین حال $|a_n-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}$ و $|b_n-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$. می‌توان نوشت

$$\left|(a_n+b_n)-(L_1+L_2)\right|=\left|(a_n-L_1)+(b_n-L_2\right|\leq|a_n-L_1|+|b_n-L_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

خلاصه نشان دادیم که برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $M \in N$ وجود دارد به طوری که اگر $n \geq M$، آنگاه $\left|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)\right| < \varepsilon$ یعنی، $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = L_1 + L_2$ و اثبات تمام است.

تبصره: به سادگی می‌توان نشان داد که اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد و c عددی ثابت، آنگاه دنباله $\{ca_n\}$ نیز همگرا است و داریم $\lim\limits_{n\to+\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. فرض کنیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. در حقیقت بایستی نشان دهیم

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in N \ni n \geq M \Rightarrow \left|ca_n - cL\right| < \varepsilon$$

اگر $c = 0$، آنگاه $\left|ca_n - cL\right| = \left|0 - 0\right| = 0 < \varepsilon$، که حکم برای هر $M \in N$ برقرار است.

فرض کنیم که $c \neq 0$ چون $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$، پس

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists M_1 \in N \ni n \geq M_1 \Rightarrow \left|a_n - c\right| < \varepsilon_1$$

اگر $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|}$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$\left|ca_n - cL\right| = |c|\left|a_n - L\right| < |c| \times \varepsilon_1 = |c| \times \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

خلاصه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $M = M_1 \in N$ وجود دارد، به طوری که اگر $n \geq M$ آنگاه $\left|ca_n - cL\right| < \varepsilon$ و این همانست که می‌خواستیم نشان دهیم.

قضیه ۳: اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L_1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L_2$، آنگاه

الف) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = L_1 - L_2$.

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\, b_n) = L_1 . L_2$.

اثبات: الف) می‌توان دنباله $\{a_n - b_n\}$ را به صورت $\{a_n + (-1)b_n\}$ در نظر گرفت.

حال با توجه به قضیه ۲ و تبصره بعد از آن داریم

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty}(a_n + (-1)b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty}(-1)b_n =$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n + (-1)\lim_{n\to+\infty} b_n = L_1 + (-1)L_2 = L_1 - L_2.$$

ب) این قسمت را بدون اثبات می‌پذیریم (در مبحث حد توابع این مطلب را در حالت کلی ثابت خواهیم کرد).

قضیه زیر را هم بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۴: اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L_1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L_2$ و برای هر n، $b_n \neq 0$ ، آنگاه

الف) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{L_2}$		ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{L_1}{L_2}$ (در صورتی که $L_2\neq 0$)

۱-۴ دنباله‌های کراندار و یکنوا

تعریف: گوییم دنباله $\{a_n\}$

(i) **صعودی** است، در صورتی که برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $a_n\le a_{n+1}$؛

(ii) **نزولی** است، در صورتی که برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $a_n\ge a_{n+1}$.

اگر دنباله صعودی یا نزولی باشد آن را **یکنوا** می‌نامیم.

توجه کنید که اگر $a_n< a_{n+1}$ (حالت خاصی از $a_n\le a_{n+1}$) دنباله را **صعودی اکید** می‌نامند، و اگر $a_n> a_{n+1}$ دنباله را **نزولی اکید** می‌نامند.

مثال ۸: معین کنید هر یک از دنباله‌های زیر صعودی، نزولی یا غیر یکنواست:

(i) $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$		(ii) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$		(iii) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

حل: (i) جملات دنباله را می‌توان بدین صورت نوشت $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{7},\dfrac{4}{9},\dots,\dfrac{n}{2n+1},\dfrac{n+1}{2n+3},\dots$ که در آن جمله عمومی دنباله $a_n=\dfrac{n}{2n+1}$ است. وقتی به چهار جمله اول دنباله نگاه می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که با افزایش n، جملات صعود می‌کنند. بنابراین به نظر می‌رسد که در حالت کلی $a_n\le a_{n+1}$. می‌توان نوشت

$$a_n\le a_{n+1}\Leftrightarrow\frac{n}{2n+1}\le\frac{n+1}{2n+3}\Leftrightarrow n(2n+3)\le(n+1)(2n+1)$$
$$\Leftrightarrow 2n^2+3n\le 2n^2+3n+1\Leftrightarrow 0\le 1$$

چون $0\le 1$ همواره برقرار است، پس $a_n\le a_{n+1}$ یعنی دنباله صعودی است (در حقیقت دنباله صعودی اکید است).

(ii) جملات دنباله را می‌توان بدین صورت نوشت $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dots,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1},\dots$

که در آن $a_n=\frac{1}{n}$ جمله عمومی دنباله است. به سادگی می‌توان نشان داد که $a_n>a_{n+1}$ یعنی دنباله نزولی اکید است.

(iii) جملات دنباله را می‌توان بدین صورت نوشت :

$$1,\frac{-1}{2},\frac{1}{3},\frac{-1}{4},\ldots,\frac{(-1)^{n+1}}{n},\frac{(-1)^{n+2}}{n+1},\ldots$$

که در آن $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ جمله عمومی دنباله است. دیده می‌شود که $a_2<a_3, a_1>a_2$. در حالت کلی، سه جمله متوالی $a_{n+2}=\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}, a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ را در نظر می‌گیریم.
اگر n فرد باشد، $a_{n+1}<a_{n+2}, a_n>a_{n+1}$ و اگر n زوج باشد، $a_{n+1}>a_{n+2}, a_n<a_{n+1}$. پس دنباله نه صعودی و نه نزولی، و بنابراین غیر یکنواست.

تعریف: عدد C را یک **کران پایین** برای دنباله $\{a_n\}$ می‌نامیم، در صورتی که برای هر عدد طبیعی n را داشته باشیم، $C\le a_n$ و عدد D را یک کران بالا برای دنباله $\{a_n\}$ می‌نامیم، در صورتی که برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم، $a_n\le D$.

به عنوان مثال در دنباله $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ که جملات آن $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\ldots,\frac{n}{2n+1},\ldots$ هستند، عدد صفر یک کران پایین دنباله است. عدد $\frac{1}{3}$ کران پایین دیگری است و در حقیقت هر عدد کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{3}$ یک کران پایین این دنباله محسوب می‌شود. همچنین در دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ با جملات $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ عدد 1 و نیز هر عدد بزرگتر از 1 یک کران بالای دنباله است. عدد 0 و نیز هر عدد کمتر از 0 یک کران پایین این دنباله است.

تعریف: اگر A یک کران پایین دنباله $\{a_n\}$ باشد و دارای این خاصیت باشد که برای هر کران پایین C از $\{a_n\}$، $C\le A$، آنگاه A **بزرگترین کران پایین** دنباله نامیده می‌شود. همین‌طور، اگر B یک کران بالای دنباله $\{a_n\}$ باشد و دارای این خاصیت باشد که برای هر کلان بالای D از $\{a_n\}$، $B\le D$، آنگاه B **کوچکترین کران بالای** دنباله نامیده می‌شود.

به عنوان مثال در دنباله $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ عدد $\frac{1}{3}$ بزرگترین کران پایین است و چون برای هر n، داریم

$$\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}<\frac{1}{2}$$

پس $\frac{1}{2}$ کوچکترین کران بالای دنباله است. در دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ عدد 1 کوچکترین کران بالا و عدد 0 بزرگترین کران پایین است.

تعریف: دنباله $\{a_n\}$ را **کراندار** می‌نامیم، درصورتی که دارای کران بالا و کران پایین باشد. دیده می‌شود که هر دو دنباله فوق کراندار هستند. به صورت زیر هم می توان دنباله کراندار را تعریف کرد.

تعریف: دنباله $\{a_n\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر عدد حقیقی مثبتی مانند K وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \in N$، داشته باشیم

$$|a_n| \le K$$

آنگاه دنباله را **کراندار**، و در غیر این صورت آن را **بی کران** می‌نامیم.

مثال ۹: دنباله‌های $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{1+\frac{1}{n^2}\right\}, \{2\}, \{(-1)^n\}$ کراندار و دنباله‌های $\{n\}, \{1+n^2\}$، $\{(-1)^n n\}$ بی‌کران هستند.

حل: (i) در دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ همواره ،یعنی ، برای هر $n \in N$، داریم $\frac{1}{n} \le 1$.

(ii) در دنباله $\left\{1+\frac{1}{n^2}\right\}$ همواره داریم $1+\frac{1}{n^2} \le 2$.

(iii) در دنباله $\{2\}$ کلیه جملات برابر با عدد ثابت 2 هستند.

(iv) در دنباله $\{(-1)^n\}$ همواره داریم $|(-1)^n| \le 1$.

(v) دنباله $\{n\}$ بی‌کران است، زیرا اگر $k > 0$ عدد دلخواهی باشد، با انتخاب $n_0 = [k]+1$ می‌بینیم که برای هر $n \ge n_0$ داریم $n > k$.

(vi) دنباله $\{1+n^2\}$ بی‌کران است، زیرا اگر $k > 0$ عدد دلخواهی باشد، با انتخاب $n_0 = [k]+1$ می‌بینیم که برای هر $n \ge n_0$ داریم $1+n^2 > k$.

(vii) دنباله $\{(-1)^n n\}$ بی‌کران است، زیرا $|(-1)^n n| = n$ و n را می‌توان بزرگتر از هر عدد مثبت دلخواهی انتخاب کرد .

تبصره: توجه کنید که

$$|a_n| \le k \Leftrightarrow -k \le a_n \le k \Leftrightarrow a_n \in [-k, k]$$

یعنی دنباله $\{a_n\}$ را کراندار می‌نامیم، در صورتی که عدد مثبتی مانند k یافت شود به طوری که کلیه جملات دنباله در همسایگی به مرکز صفر و شعاع k واقع شوند.

شکل ۱ . ۶

یادآوری اصل کمال

هر زیر مجموعه غیر تهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگترین کران پایین است. همچنین، هر زیر مجموعه غیر تهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا است.
در بررسی دنباله‌ها گاهی اوقات تنها اطلاع از همگرایی دنباله برای ما کفایت می‌کند و نیازی به مقدار دقیق حد دنباله نداریم. قضیه زیر در مورد همگرایی دنباله‌های یکنوا بسیار مفید است.

قضیه ۵: هردنباله کراندار یکنوا همگراست.

اثبات: قضیه را برای حالتی ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ یکنوا، صعودی باشد. فرض کنیم دنباله مورد نظر $\{a_n\}$ باشد. از آنجایی که $\{a_n\}$ کراندار است، دارای یک کران بالا است. بنابر اصل کمال $\{a_n\}$ دارای کوچکترین کران بالا است که آن را B می‌نامیم. در این صورت اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، $B-\varepsilon$ نمی‌تواند یک کران بالا برای دنباله باشد، زیرا $B-\varepsilon < B$ و B کوچکترین کران بالای دنباله است. پس عددی طبیعی مانند n_0 وجود دارد، بطوری که

$$B-\varepsilon < a_{n_0} \qquad (1)$$

چون B کوچکترین کران بالای $\{a_n\}$ است. بنا بر تعریف کران بالا برای هر $n \in N$ داریم

$$a_n \le B \qquad (2)$$

چون $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است، برای هر عدد طبیعی n داریم

$$a_n \le a_{n+1} \qquad (3)$$

و بنابراین برای هر $n \ge n_0$ داریم

$$a_{n_0} \le a_n$$

از $(1),(2),(3)$ نتیجه می‌شود که برای هر $n \ge n_0$

$$B-\varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le B+\varepsilon$$

که از آن به دست می‌آوریم:

برای هر $n \ge n_0$ ، $B-\varepsilon < a_n < B+\varepsilon$ یا به عبارت معادل برای هر $n \ge n_0$ ، $-\varepsilon < a_n - B < \varepsilon$ که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$\text{برای هر } n \ge n_0 \quad |a_n - B| < \varepsilon$$

پس در حقیقت ثابت کرده‌ایم که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N \ni n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - B| < \varepsilon$$

یعنی $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = B$. بنابراین دنباله $\{a_n\}$ همگراست.

برای اثبات قضیه وقتی $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی است، دنباله $\{-a_n\}$ را که صعودی می‌شود، در نظر می‌گیریم و استدلال بالا را در مورد آن به کار می‌بریم. این قسمت را به عنوان تمرین کامل کنید.

تبصره: با استفاده از قضیه ۵ دیده می‌شود که:

۱) اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی باشد و D یک کران بالا برای آن، آنگاه $\{a_n\}$ همگراست و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le D$.

۲) اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد و C یک کران پایین برای آن، آنگاه $\{a_n\}$ همگراست و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \ge C$.

مثال ۱۰: با استفاده از قضیه ۵ نشان دهید که دنباله $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ همگراست.

حل: جمله‌های دنباله داده شده عبارتند از

$$\frac{2^1}{1!},\frac{2^2}{2!},\frac{2^3}{3!},\frac{2^4}{4!},\dots,\frac{2^n}{n!},\frac{2^{n+1}}{(n+1)!},\dots$$

یا پس از ساده کردن

$$2,2,\frac{4}{3},\frac{2}{3},\dots,\frac{2^n}{n!},\frac{2^{n+1}}{(n+1)!},\dots$$

می‌بینیم که $a_1 = a_2 > a_3 > a_4$ و بنابراین دنباله داده شده ممکن است نزولی باشد. بایستی تحقیق کنیم که $a_n \ge a_{n+1}$ ، یعنی، $\frac{2^n}{n!} \ge \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. اما می‌توان نوشت

$$\frac{2^n}{n!} \ge \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \Leftrightarrow 2^n (n+1)! \ge 2^{n+1}\, n! \Leftrightarrow 2^n\, n!(n+1) \ge 2.2^n\, n! \Leftrightarrow n+1 \ge 2$$

نامساوی آخری همواره درست است و بنابراین، معادل با آن، $a_n \geq a_{n+1}$ همواره درست است، یعنی دنباله نزولی و لذا یکنواست. عدد 2 یک کران بالای دنباله و عدد 0 یک کران پایین آن است، پس دنباله کراندار است. در نتیجه، دنباله $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ یک دنباله کراندار یکنواست و بنابر قضیه ۵ همگراست.

مثال ۱۱: برای عدد مفروض $a > 0$ ثابت کنید که $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

حل: ابتدا فرض کنیم $a > 1$ و قرار می‌دهیم $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$. در این صورت بنا بر قضیه دو جمله‌ای نیوتن داریم $a = (1+x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2!}x_n^2 + \ldots + x_n^n > nx_n$ (زیرا به سادگی دیده می‌شود که $x_n > 0$) و بنابراین $0 < x_n < \frac{a}{n}$، که از آن نتیجه می‌شود

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} x_n \leq a \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

بنابراین $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = 0$ ، که از آن به دست می‌آوریم

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

اگر $a = 1$، آنگاه واضح است که برای هر n، $\sqrt[n]{a} = 1$ و بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

اگر $0 < a < 1$، آنگاه $\frac{1}{a} > 1$ و لذا همانطور که در بالا دیدیم $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. اکنون داریم $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$.

مثال ۱۲: ثابت کنید که دنباله

$$x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, x_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots,$$

$$x_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}} = \sqrt{a + x_{n-1}}, \ldots (a > 0)$$

همگراست. حد آن را نیز پیدا کنید.

حل: به سادگی دیده می‌شود که دنباله $\{x_n\}$ صعودی اکید است و این مطلب را به استقراء می‌توان نشان داد. رابطه بازگشتی $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ نتیجه می‌دهد که $x_n^2 = a + x_{n-1}$ و بنابراین

$$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} < \frac{a}{x_n} + 1$$

زیرا $x_{n-1} < x_n$. اما $x_n \geq \sqrt{a}$ و بنابراین برای هر $n \in N$ ، $\sqrt{a} \leq x_n < \sqrt{a}+1$. پس $\{x_n\}$ کراندار و صعودی است. از قضیه ۵ نتیجه می شود که $\{x_n\}$ همگراست. فرض می‌کنیم که $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$ و c را پیدا می‌کنیم توجه داریم که

$$c^2 = \lim_{n\to+\infty} x_n^2 + \lim_{n\to+\infty} x_n = a + c$$

و بنابراین $c^2 = a + c$. با حل این معادله بدست می‌آوریم

$$c = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

زیرا پاسخ منفی معادله قابل قبول نیست.